**Лекция 14 Непрерывность функции одной действительной переменной**

**14.1 Определения непрерывности**

Пусть  - предельная точка множества .

**М14.1.1 Определение.** Функция  называется *непрерывной в точке* , если .

*Замечание 1.* Приведенное определение непрерывности подразумевает, вообще говоря, три допущения: 1) функция  определена в точке ; б) существует конечный предел ; в) значение предела  совпадает со значением функции  в точке .

*Замечание 2.* Из определения М14.1.1 видно, что при вычислении предела от непрерывной функции достаточно подставить предельное значение  в функцию, находящуюся под знаком предела.

Развернутое определение непрерывности на языке  (определение непрерывности по Коши) выглядит так (просто расшифровано понятие предела из определения М14.1.1):

**М14.1.2 Определение.** Функция  называется непрерывной в точке , если для  .

*Замечание.* Если в определении М14.1.1 значок предела заменить на значок правого (левого) предела, то получится определение *правой (левой) непрерывнос*ти функции в точке.

**М14.1.3 Определение (непрерывность по Гейне)**  Функция  *непрерывна в точке ,* если для любой последовательности  такой, что  выполняется равенство .

**М14.1.4 Теорема** Определения непрерывности по Коши и предела по Гейне равносильны.

*Доказательство.* Достаточно повторить доказательство теоремы 13.4.2, заменив в нем  на .

**М14.1.5 Определение.**  Пусть - некоторое число, которое будем называть приращением переменной . Если разность  имеет смысл, то она называется *приращением функции*  в точке **, соответствующим приращению .

**М14.1.6 Теорема (непрерывность в терминах приращений).** Функция  тогда и только тогда непрерывна в точке **, когда из  следует .

*Доказательство.* Заменив в определении М14.1.2 переменную  на , сразу получим требуемое.

**М14.1.7 Определение.** Функция называется *непрерывной на множестве* , если она непрерывна в любой точке этого множества. Множество всех функций, непрерывных на множестве  будем обозначать .

**14.2 Непрерывность элементарных функций**

**М14.2.1 Теорема (Непрерывность и арифметические операции)** 1) Если функции  и  определены в некоторой окрестности точки  и обе функции непрерывны в этой точке, то функции ,  и  также непрерывны в точке ; 2) Если функции  и  определены в некоторой окрестности точки , обе функции непрерывны в этой точке и , то функция  также непрерывна в точке .

*Доказательство.* Сразу же следует из определения непрерывности М14.1.1 и теоремы о пределе и арифметических операциях М13.6.1.

Примеры непрерывных элементарных функций:

**М14.2.2** Постоянная функция непрерывна в любой точке числовой прямой (следует из определения М14.1.1).

**М14.2.3** Функция  непрерывна в любой точке числовой прямой (следует из определения М14.1.4).

**М14.2.4** Функция  при любом  непрерывна в любой точке числовой прямой (следует из М14.2.3 и теоремы М14.2.1).

**М14.2.5** Любой многочлен  непрерывен в любой точке числовой прямой (следует из М14.2.4, М14.2.2 и М14.2.1).

**М14.2.6** Любая дробно-рациональная функция  непрерывна в любой точке числовой прямой, кроме корней многочлена  (следует из М14.2.5 и М14.2.1).

**М14.2.7** Несколько сложнее доказываются следующие непрерывности:

- показательная функция  непрерывна на всей числовой прямой;

- функции  и  непрерывны на всей числовой прямой;

- функция  непрерывна на всей числовой прямой, кроме точек вида ;

- функция  непрерывна на всей числовой прямой, кроме точек вида ;

-функция  непрерывна в любой точке интервала ;

**14.3 Разрывы функций**

**М14.3.1 Определение.** Если функция не является непрерывной в некоторой точке множества (области определения функции), то такая точка называется *точкой разрыва* функции.

**М14.3.2** *Замечание.* На языке  разрывность функции в точке  записывается так:

  .

Допустим, функция  определена в точке .Тогда для непрерывности функции  в точке  необходимо и достаточно, чтобы в этой точке существовали оба односторонних предела, оба были конечны и совпадали со значением функции в этой точке. Значит, для разрывности функции в точке  достаточно нарушения хотя бы одного из перечисленных условий. В связи с этим различают три вида точек разрыва:

**М14.3.3 Определение (Классификация разрывов)**

- точка  называется *точкой устранимого разрыва* функции , если ;

- точка  называется *точкой разрыва первого рода* функции , если ;

- точка разрыва  называется *точкой разрыва второго рода* функции  во всех остальных случаях.

**М14.3.4** *Замечание.* В определении точек разрыва первого и второго рода вообще не фигурирует значение функции . Значит, в этих случаях не важно, определена функция  в точке  или нет. Если же в точке  функция  не определена, но при этом  то можно говорить об устранимом разрыве функции в этой точке.

**М14.3.5 Пример.** Функция  имеет в точке  устранимый разрыв, функции  и  имеют в точке  разрывы первого рода, функции ,  и  имеют в точке  разрывы второго рода.

|  |  |
| --- | --- |
| Примеры разрывов функции в точке 0 | |
| 3.jpg | 4.jpg |
| 5.jpg | 6.jpg |
| 7.jpg | 8.jpg |

**М14.3.6 Пример (функция Дирихле)** Функция Дирихле  разрывна во всех точках и все точки разрыва – второго рода.

**М14.3.7 Пример (Функция Римана)** Функция Римана  разрывна во всех рациональных точках и непрерывна в иррациональных точках.

**14.4 Монотонные функции**

**М14.4.1 Теорема (Разрывы монотонной функции)** Если монотонная функция, определенная на некотором промежутке, имеет разрывы, то это разрывы первого рода.

*Доказательство.* Пусть функция  возрастает на промежутке  и имеет разрыв в точке . Тогда, применив к промежутку  теорему М10.5.1 о пределе монотонной ограниченной функции (ограниченность следует из возрастания ), получим, что функция  имеет в точке конечный левый предел. Из той же теоремы следует, что функция имеет конечный правый предел, поэтому, если в точке  имеет место разрыв, то это разрыв первого рода.

**М14.4.2** *Следствие 1.* Если областью значений монотонной функции, заданной на промежутке , является некоторый промежуток , то эта функция непрерывна на промежутке .

**М14.4.3** *Следствие 2.* Множество точек разрыва монотонной функции не более чем счетно.

**14.5 Локальные свойства непрерывных функций**

**М14.5.1 Теорема (ограниченность непрерывной функции)** Если функция  непрерывна в точке , то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.

*Доказательство.* Следует из определения непрерывности М14.1.2.

**М14.5.2 Теорема (сохранение знака непрерывной функции)** Если функция  непрерывна в точке  и , то в некоторой окрестности точки  значения функции  имеют тот же знак, что и .

*Доказательство.* Следует из М14.5.1.

**М14.5.3 Теорема (непрерывность композиции функций)** Пусть функция  определена в промежутке , а функция  - в промежутке  и при этом значения функции  содержатся в промежутке . Если функция  непрерывна в точке , а функция  непрерывна в точке , то функция  непрерывна в точке .

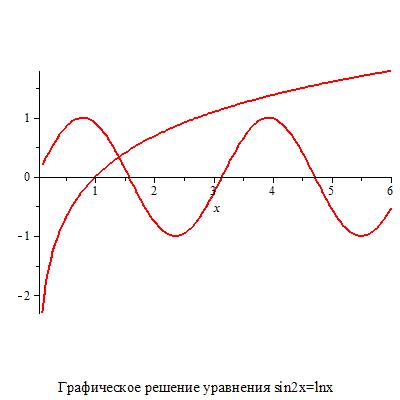
*Доказательство.* Пусть , тогда, в силу непрерывности функции , найдется число  такое, что из  следует . В силу непрерывности функции  найдется число  такое, что из  следует . Значит, для числа  найдено число  такое, что из  следует , что и требовалось.

**14.6 Теоремы Больцано-Коши**

**М14.6.1 Теорема Больцано-Коши (о нулевом значении).** Если функция  определена и непрерывна на отрезке  и принимает в точках  и  значения разных знаков, то  такая, что .

*Доказательство.* Допустим, , . Рассмотрим значение функции в середине промежутка . Если , то теорема доказана. Если , то рассмотрим промежуток ; а если , то промежуток . На концах этого промежутка функция снова имеет значения разных знаков. Рассмотрев значение функции в середине нового интервала, разобьем его на два интервала, на концах одного из которых х функция снова будет иметь значения разных знаков. Продолжая этот процесс деления пополам, либо получим точку, в которой , либо получим бесконечную последовательность вложенных отрезков  такую, что . Значение каждого из этих пределов и есть искомая точка.

**М14.6.2** *Замечание.* Теорему о нулевом значении можно использовать для приближенного решения уравнений.

**М14.6.3 Пример.** Найти корни уравнения .

*Решение:* Функция - периодическая, а функция  монотонно возрастающая, поэтому графики этих функций имеют единственную точку пересечения, которой соответствует нуль функции . Для отделения корня используем графический способ. Из графика следует, что значение корня лежит в промежутке . Таким образом, имеем нулевое приближение  (середина промежутка). Точность  такого приближения равна половине длины промежутка , т.е. . Корень лежит, вероятно, внутри промежутка . Поверим эту гипотезу: , а . В крайних точках промежутка  функция имеет разные знаки, поэтому за следующее приближение корня можно принять середину отрезка , т.е. , точность которого равна .

Снова делим отрезок  пополам и находим значение функции  в его середине 1, 375:  .Таким образом, корень лежит на промежутке . Его середина  - очередное приближение корня уравнения с точностью ; при этом . Значит, корень лежит на промежутке  и его середина  - следующее приближение корня с точностью . Продолжая процесс деления отрезка пополам, можно получить значение корня уравнения с любой заданной точностью.

**М14.6.4 Теорема Больцано-Коши (о промежуточном значении)** Пусть функция  определена и непрерывна на промежутке (конечном или бесконечном, замкнутом, открытом или полуоткрытом). Если в каких-либо точках этого промежутка функция принимает значения  и , то для любого числа  найдется точка  такая, что .

*Доказательство.* Пусть , и для определенности . Тогда функция  на промежутке  удовлетворяет условиям теоремы М14.1.1. Значит,  такая, что , то есть .

**14.7 Обратная функция. Теоремы Вейерштрасса**

**М14.7.1 Теорема (о существовании обратной функции)** Пусть функция  определена, строго монотонна и непрерывна на некотором промежутке  (конечном или бесконечном, замкнутом, открытом или полуоткрытом). Тогда в промежутке  значений этой функции существует однозначная обратная функция, являющаяся непрерывной и имеющая тот же характер монотонности.

*Доказательство*. Пусть  возрастает на промежутке . Из теоремы 14.6.4 следует, что значения непрерывной функции  сплошь заполняют промежуток , а в силу монотонности для каждого числа  найдется ровно одно число  такое, что . Сопоставив каждому числу  его прообраз , получим однозначную обратную функцию .

Пусть  и , , но тогда, в силу определения обратной функции, , . Если было бы , то тогда, в силу возрастания функции  было бы , т е. , что противоречит предположению . Значит, обратная функция также возрастающая.

Непрерывность обратной функции является очевидным следствием М14.4.2.

**М14.6.2 Пример.** Найдем функции, обратные к *гиперболическому синусу* и *гиперболическому косинусу* .

*Решение.* Из уравнения  заменой получаем ; ; . Поскольку , то должно быть . Тогда . Функцию , обратную к гиперболическому синусу, называют ареа-синус.

Аналогично находится ареа-косинус: .

**М14.6.3 Теорема Вейерштрасса (об ограниченности непрерывной функции)**  Если функция  определена и непрерывна на отрезке , то существуют числа  такие, что для  выполняются неравенства .

**М14.6.4 Теорема Вейерштрасса (о наибольшем и наименьшем значениях)** Если функция  определена и непрерывна на отрезке , то она достигает на этом отрезке своих точных верхней и нижней граней.

*Доказательство.* Пусть , . Допустим, что для  имеет место неравенство , то есть точная верхняя грань не достигается. Рассмотрим функцию . Поскольку знаменатель в ноль не обращается, то  непрерывна и, по теореме М13.2.2 ограничена: . Тогда  и . Последнее неравенство противоречит тому, что . Аналогично можно доказать, что достигается и точная нижняя грань.

**14.7 Равномерная непрерывность**

**М14.7.1 Определение.** Функция  называется равномерно непрерывной на промежутке  (конечном или бесконечном, замкнутом, открытом или полуоткрытом), если для любого числа  найдется число  такое, что для любых точек ,  из неравенства  следует .

**М14.7.2** *Замечание 1.*Если подробно расписать определение непрерывности функции на промежутке  (М14.1.8), то получим: для любого числа  и любых точек ,  найдется число  такое, что из неравенства  следует .

Отличие непрерывности на промежутке от равномерной непрерывности заключается в том, что в определении М14.7.1 число  одно и то же для всех пар чисел , , а в определении М14.1.8 разным парам чисел , , вообще говоря, соответствуют разные значения .

**М14.7.2** *Замечание 2.* Отрицание равномерной непрерывности на промежутке выглядит так: такое, что  найдутся точки ,  такие, что , но т .

**М14.7.3** *Замечание 3.* Очевидно, что любая равномерно непрерывная на промежутке функция непрерывна на этом промежутке. Существуют непрерывные функции, не являющиеся равномерно непрерывными.

**М14.7.4 Примеры.** 1) Функция  равномерно непрерывна на промежутке . Пусть , тогда можно взять . Действительно, если , то .

2) Функция  равномерно непрерывна на промежутке . Заметим, что для любых действительных чисел  и , не равных одновременно нулю, выполняется неравенство  (проверяется возведением в квадрат). Тогда, обозначив , получим . Пусть , тогда можно взять  (при ). Действительно, .

3) Функция  не является равномерно непрерывной на промежутке . Пусть  рассмотрим последовательности точек , , тогда , но . Значит, для  как бы близко ни были выбраны точки ,  (это возможно в силу равенства ), будет .

4) Функция  не является равномерно непрерывной на промежутке . Аналогично предыдущему примеру можно рассмотреть последовательности точек , .

|  |  |
| --- | --- |
| Примеры функций, не являющихся равномерно непрерывными | |
| 1.jpg | 2.jpg |

5) Функция  не является равномерно непрерывной на любом промежутке . Действительно, в любой окрестности точки  есть значения функции, равные 1 и -1. Значит, если взять , то условие равномерной непрерывности не выполнится.

6) Если непрерывная функция определена на открытом промежутке  и неограничена в любой окрестности точки  (или ), то функция не является равномерно непрерывной на этом промежутке.

**М14.7.5 Теорема Кантора (о равномерной непрерывности на отрезке)** Если функция равномерно непрерывна на отрезке , то она равномерно непрерывна на нем.

**Контрольные вопросы:**

1. Дайте определение непрерывной в точке функции через определение предела. Дайте определение непрерывной в точке функции на языке .
2. Дайте определение непрерывной в точке функции через понятие приращения. Дайте определение непрерывной в точке функции на языке последовательностей. Дайте определение функции, непрерывной на множестве.
3. Сформулируйте теорему о непрерывности и арифметических операциях. Приведите примеры непрерывных элементарных функций.
4. Что называется точкой разрыва функции? Дайте определение устранимого разрыва, разрыва первого рода, разрыва второго рода.
5. Сформулируйте теорему о разрывах монотонной функции. Сформулируйте теорему об ограниченности непрерывной функции.
6. Сформулируйте теорему о сохранении знака непрерывной функции. Сформулируйте теорему о непрерывности композиции функций.
7. Сформулируйте теорему Больцано-Коши о нулевом значении. Сформулируйте теорему Больцано-Коши о промежуточном значении.
8. Сформулируйте алгоритм приближенного решения уравнений.
9. Сформулируйте теорему о существовании обратной функции. Сформулируйте теорему вейерштрасса об ограниченности непрерывной функции. Сформулируйте теорему Вейерштрасса о наибольшем и наименьшем значениях.
10. Дайте определение равномерной непрерывности. Сформулируйте теорему Кантора.